Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана

В.Н. БАСКАКОВ, Г.Д. КАРТАШОВ

ВВЕДЕНИЕ
В АКТУАРНУЮ МАТЕМАТИКУ

Москва 1998

Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана

В.Н. Баскаков, Г.Д. Карташов

ВВЕДЕНИЕ В АКТУАРНУЮ МАТЕМАТИКУ

Рекомендовано редсоветом МГТУ им. Н.Э. Баумана
в качестве учебного пособия

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

1998

ББК 22.17
Б27

Рецензенты: В.А. Кашташов, О.И. Тескин

Б 27 Баскаков В.Н., Карташов Г.Д. Введение в актуарную математику: Учебное пособие. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. - 63 с., ил.

Рассмотрены основные вероятностные характеристики продолжительности жизни. Изложены методы расчета сложных процентов., необходимые для описания накопления капитала. Приведен ряд краткосрочных и долгосрочных моделей страхования жизни.

Для студентов и слушателей институтов повышения квалификации, интересующихся актуарной математикой.

Ил. 1 Табл. 1 Библиогр. 3 назв.

ББК 22.17

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие предназначено для студентов факультета фундаментальных наук, обучающихся по специальности "Прикладная математика", которые в качестве дополнительной дисциплины выбрали курс "Актуарная математика". Оно может быть полезным для первоначального ознакомления с актуарной математикой. Пособие написано в предположении, что читатель знаком с основными разделами математического анализа, читаемого по программе для технических вузов и университетов, а также с основами теории вероятностей и математической статистики.

Ответим на естественный вопрос: "Что такое актуарная математика"? Это самостоятельная математическая дисциплина, имеющая свои методы исследования и областью применения. В ней фундаментальную роль играют теория вероятностей и методы расчета сложных процентов. Кратко поясним ее содержание на примере страхования жизни (именно этот случай будет рассматриваться в дальнейшем). Человек определенного возраста заключает договор со страховой компанией на определенных условиях. Он покупает страховой полис за некоторую сумму денег, чтобы со временем ему или его наследникам после его смерти была выплачена большая сумма денег. Страховая компания на этой сделке тоже хочет получить определенную прибыль. Актуарная математика и призвана дать рекомендации, которые были бы привлекательными как для клиентов, так и для страховых компаний.

Интуитивно ясно, что для принятия разумного решения необходимо знать достаточно подробные сведения о продолжительности жизни людей и степени прибыльности страховой компании; учитывать формы страхования (а их множество), уровень инфляции, правовые, юридические и др. аспекты.

Страхование жизни имеет давнюю историю. Еще в 1693 году Эдмунд Галлей впервые в мире составил таблицу продолжительности жизни, которая содержит основную статистическую информацию, необходимую в актуарной математике для последующих расчетов.

Широко было поставлено страхование жизни в дореволюционной России. Велась подготовка соответствующих специалистов, издавались монографии и учебники по актуарной математике. Отметим, в частности, капитальное сочинение Б.Ф. Малешевского "Теория и практика пенсионных касс", книгу А. Маркова по теории вероятностей, в которой одна глава посвящена страхованию жизни.

После революции 1917 г. до недавнего времени актуарное образование и актуарная наука практически отсутствовали. В передовых же странах Америки и Европы с развитой рыночной экономикой подготовка специалистов по актуарной математике (актуариев) осуществляется во многих университетах, издаются журналы, учебная и научная литература, создаются различные профессиональные объединения актуариев.

С переходом России к новым экономическим отношениям создано более тысячи страховых компаний, множество банков, негосударственных пенсионных фондов, огромное число коммерческих структур, которые остро нуждаются в актуариях. В связи с этим чрезвычайно актуальной стала организация актуарного образования. Работа в этом направлении начата в ряде университетах. Так, в МГУ им. М.В. Ломоносова на базе факультетов экономического, вычислительной техники, механико-математического создан центр, который по программе Общества Актуариев (США) начал подготовку специалистов. В России под руководством А.Н. Ширяева создано Общество актуариев России, одной из задач которого является организация актуарного образования.

В МГТУ им. Н.Э. Баумана в Институте прикладной математики и механики создан сектор "Актуарная и финансовая математика", и для студентов факультета фундаментальных наук представлена возможность выбрать в качестве дополнительной дисциплины курс "Актуарная математика". Важно отметить, что уже несколько лет осуществляет подготовку специалистов факультет "Инженерный бизнес и менеджмент", предоставляющий возможность всем студентам получить дополнительно экономическое образование.

Пособие содержит три главы. В первой главе описаны вероятностная продолжительность жизни, остаточная продолжительность жизни, даны таблицы продолжительности жизни. Во второй главе рассмотрены методы вычисления сложных процентов, позволяющие рассчитывать накопление капитала. Третья глава посвящена описанию ряда схем краткосрочного страхования жизни.

Читателю следует обратить особое внимание на обозначения и терминологию, используемые в актуарной математике, тем более, что они существенно отличается от принятых в современной теории вероятностей и математической статистике. Это связано с тем, что основные величины, встречающиеся в актуарной математики, и их обозначения были стандартизованы еще в 1898 году на международном актуарном конгрессе. Такая акция была предпринята с целью упростить общение между актуариями и облегчить внедрение результатов научных исследований.

В заключение отметим, что для желающих более глубоко ознакомиться с методами актуарной математики в конце пособия приведен список литературы.

ГЛАВА 1. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ

1.1. ОСНОВНАЯ МОДЕЛЬ

Прежде всего обратимся к студентам (возможно и к другим читателям), знающим основные принципы теории надежности. Легко заметить, что описание продолжительности жизни практически проводится так же, как наработки на отказ технических изделий, только вводимые ниже характеристики будем называть иначе. Это поможет лучше понять их смысл.

Поскольку продолжительность жизни не у всех одинакова, т.е. случайна, то естественно попытаться описать ее вероятностными законами. Но применимы ли они здесь? Строго говоря, нет, во всяком случае, это не доказано. Уточним, о чем идет речь.

Функцию распределения можно ввести для случайной величины, принимающей статистически устойчивые значения. Точнее, частота принятия значений наблюдаемых реализаций случайной величины в любой фиксированный интервал должна быть статистически устойчивой. Применительно к продолжительности жизни это трудно ожидать в силу многих причин, например, для людей разного поколения. Страховые же компании обслуживают клиентов любого возраста.

Но, несмотря на это, последующие рассуждения будет осуществлять в рамках вероятностной модели. В связи с этим кратко приведем сведения из теории вероятностей и математической статистики, необходимые для разработки методов страхования жизни. Хотя предполагается, что читатель знаком с основными принципами теории вероятностей и математической статистики.

1.2. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пусть A - случайное событие, а $P(A)$ - его вероятность. Статистически вероятность случайного события описывается с помощью частоты $\hat{P}(A)$ события A. Если в n опытах событие наступило точно m раз, то

$$\hat{P}(A) = \frac{m}{n} \ . \tag{1.1}$$

На интуитивном уровне вероятность $P(A)$ определяется как "предел" (не в классическом его понимании) частоты $\hat{P}(A)$ при неограниченном возрастании числа n опытов. Если этот "предел" (не в классическом его понимании) частоты $\hat{P}(A)$ принимает статистические устойчивые значения, можно применять вероятностные законы.

Рассмотрим теперь операцию над двумя событиями A и B.

Суммой $A+B$ называют такое событие, которое наступает при появлении любого события A и B (или их обоих). Произведением AB называют такое событие, которое наступает лишь при одновременном появлении событий A и B.

Приведем формулу, связывающую между собой вероятности $P(A+B)$ и $P(AB)$.

Предположим, что были проведены n опытов, и в них события A, B, $A+B$ и AB появлялись соответственно m_A, m_B, m_{A+B} и m_{AB} раз. Тогда, согласно соотношению (1.1), частоты этих событий

$$\hat{P}(A) = \frac{m_A}{n}, \quad \hat{P}(B) = \frac{m_B}{n},$$

$$\hat{P}(A+B) = \frac{m_{A+B}}{n}, \quad \hat{P}(AB) = \frac{m_{AB}}{n}.$$

Очевидно, что

$$m_{A+B} = m_A + m_B - m_{AB} .$$

Следовательно,

$$\hat{P}(A+B) = \hat{P}(A) + \hat{P}(B) - \hat{P}(AB) . \tag{1.2}$$

Устремляя в выражении (1.2) n к бесконечности и учитывая комментарии к формуле (1.1), получаем правило сложения вероятностей:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) . \tag{1.3}$$

Введем условную вероятность

$$P(A \mid B) := \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0 \tag{1.4}$$

события A при появлении в опыте события B.

Используя выражение (1.4), получаем правило умножения вероятностей:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A \mid B) = P(A)P(B \mid A). \tag{1.5}$$

Пусть X - случайная величина. Обозначим

$$F(x) := P(X \leq x),$$

$$\overline{F}(x) := P(X > x) = 1 - F(x)$$

соответственно ее функцию распределения и дополнительную функцию распределения. Уточним, что распределение $F(x)$ $\left[\overline{F}(x)\right]$ представляет собой вероятность, с которой случайная величина X не больше [больше] любого фиксированного числа x.

Напомним основные свойства функции распределения.

1. $F(-\infty) = 0$.
2. $F(x) \uparrow x$, т.е. неубывающая функция x.
3. $F(+\infty) = 1$.

Для непрерывной случайной величины X существует плотность вероятностей, определяемая по формуле

$$f(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}. \tag{1.6}$$

Функция $f(x)$ должна быть неотрицательной и нормированной на единицу:

1. $f(x) \geq 0, \ \forall x;$
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Между плотностью вероятностей $f(x)$ и распределениями $F(x), \overline{F}(x)$ существуют простые связи:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = -\frac{d\overline{F}(x)}{dx},$$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx, \tag{1.7}$$

$$\overline{F}(x) = \int_{x}^{+\infty} f(x)dx.$$

Из числовых характеристик в дальнейшем потребуются математическое ожидание m, начальный момент второго порядка ν_2, дисперсия σ^2 и среднее квадратическое отклонение σ. Для непрерывной случайной величины X их определяют по следующим формулам:

$$m := EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$$

$$\nu_2{}^2 := EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx, \qquad (1.8)$$

$$\sigma^2 = DX = E(X - EX)^2 = E(X - m)^2 =$$

$$EX^2 - (EX)^2 = \nu^2 - m^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x)dx.$$

Приведем необходимые сведения из математической статистики.

Начнем с точечной оценки вероятности $p := P(A)$ события A. Предположим, что были проведены n независимых опытов и в них событие A появилось точно m раз, а в остальных $n - m$ опытах наступило противоположное событие $\overline{A}$. Согласно схеме независимых испытаний с двумя исходами, это может произойти с вероятностью

$$P_{n,m} := C_n^m p^m (1 - p)^{n-m},$$

описывающей биноминальным законом.

В качестве точечной оценки вероятности p принимают частоту (1.1):

$$\hat{p} := \frac{m}{n}.$$

Эта оценка несмещенная, т.е.

$$E\hat{p} = \sum \frac{m}{n} C_n^m p^m (1 - p)^{n-m} = p,$$

состоятельная, т.е. для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{p}-p\right|<\varepsilon\right)=1,$$

и имеет дисперсию

$$D(\hat{p})=\frac{p(1-p)}{n}.$$

Обратимся к оценкам числовых характеристик и распределению случайной величины X.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - n независимых наблюдений случайной величины X. В соответствии с этими данными несмещенные и состоятельные оценки математического ожидания m и дисперсии σ^2 рассчитывают по формулам

$$\hat{m}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i =: \bar{x},$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 =: S^2.$$

Если задан закон распределения $F(x)$ с точностью до ряда неизвестных параметров $\theta := (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \in \Theta$, где Θ - область допустимых значений θ, то для нахождения оценок $\hat{\theta}$ часто используют методы моментов и максимального правдоподобия. Напомним их сущность для непрерывной случайной величины X, имеющей плотность вероятностей $f(x,\theta)$.

Метод моментов состоит в приравнивании ряда теоретических моментов к эмпирическим. Обычно выбирают начальные моменты $\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_{k+1}$ и оценивают их по формулам

$$\hat{\nu}_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,j},\ j=\overline{2,k+1}.$$

Затем находят теоретические моменты

$$\nu_j(\theta)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^j f(x,\theta)dx,\ j=\overline{2,k+1}.$$

Приравнивая ν_j к $\hat{\nu}_j$, $j=2,3,\ldots,k+1$, составляют систему уравнений

$$\nu_j(\theta)=\hat{\nu}_j(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ j=\overline{2,\,k+1}.$$

Решение этой системы $\hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно θ и принимают в качестве точечных оценок параметров θ.

При больших значениях n метод моментов дает приемлемые для практики результаты.

Согласно методу максимального правдоподобия, вначале составляют функцию правдоподобия

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \theta) := \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

или ее логарифм $\ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \theta)$. После этого находят их максимум по $\theta \in \Theta$ при фиксированных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если функция $L(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \theta)$ дифференцируема по θ, то записывают необходимое условие максимума

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \theta)}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

При достаточно общих условиях решение $\hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ этой системы относительно θ (при фиксированных $x_1, x_2, \ldots, x_n$) единственно и является точной максимума функции $L(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \theta)$ на множестве Θ. Его и полагают в качестве точечной оценки параметров θ.

Метод максимального правдоподобия, являющийся одним из основных методов точечного оценивания, позволяет получить "хорошие" оценки.

Перейдем к оценке законов $F(x)$ и $\overline{F}(x)$. Введем эмпирическую функцию распределения

$$\hat{F}_n(x) := \frac{d(x)}{n},$$

где $d(x)$ - число наблюдений x_i, $i = \overline{1, n}$, меньших или равных $x \in R$.

Согласно основной теореме математической статистики (теорема Гливенко), функция $\hat{F}_n(x)$ равномерно сходится по вероятности к $F(x)$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\max_{-\infty < x < +\infty} |\hat{F}_n(x) - F(x)| < \varepsilon \right) = 1.$$

В заключение приведем два критерия согласия относительно вида функции распределения.

Критерий Колмогорова. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - независимые и одинаково распределенные наблюдения случайной величины X. Распределение $P(X \le x)$ неизвестно, но высказана гипотеза о том, что оно равно заданной непрерывной функции распределения $F(x)$.

Спрашивается, согласуются или нет результаты наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с гипотезой о том, что они распределены в соответствии с законом $F(x)$.

Для ответа на этот вопрос необходимо вначале определить эмпирическое распределение

$$\hat{F}_n(x) = \frac{d(x)}{n},$$

где $d(x)$ - число наблюдений x_i, $i = 1,n$, не больших x.

Затем следует найти отклонение

$$D := \max_{-\infty < x < +\infty} \left| \hat{F}_n(x) - F(x) \right|.$$

Далее задают уровень значимости β и по известным статистическим таблицам находят критическое значение $D_{\text{кр}}(\beta)$. Если окажется, что

$$D \le D_{\text{кр}}(\beta),$$

то гипотезу с уровнем значимости принимают, в противоположном случае - отвергают.

Напомним, что критерий Колмогорова применим лишь в том случае, если теоретическое распределение $F(x)$ полностью определено. Однако на практике часто возникают ситуации, когда задан вид распределения $F(x,\theta)$ с точностью параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$; $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$. В этом случае часто используют следующий критерий.

Критерий хи-квадрат (χ^2). Вначале по опытным данным находят оценки $\hat{\theta}_i$ неизвестных параметров θ_i, $i = \overline{1,k}$. Для этого можно использовать различные методы, приведенные выше. Обычно в качестве θ_i, $i = \overline{1,k}$, выступают два параметра - математическое ожидание и дисперсия. Затем всю числовую ось разбивают на l интервалов ($l \sim 8$-12): $\quad \left]y_{j-1}; y_j\right[$, $j = \overline{1,\ell}$, $y_0 = -\infty$, $y_\ell = +\infty$

Далее подсчитывают число m_j значений x_j, $i=\overline{1,n}$, попадающих в j-ый интервал. С помощью распределения $F(x, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k)$ вычисляют вероятности

$$p_j = F(y_j, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k) - F(y_{j-1}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k).$$

После этого рассчитывают значение статистики

$$\chi^2 := \sum_{j=1}^{l} \frac{(m_j - np_j)^2}{np_j}.$$

Задавая уровень значимости β, по известным статистическим таблицам находят критическое значение $\chi^2_{\text{кр}}(\beta)$ при степени свободы $n-k-1$. При $\chi^2 \le \chi^2_{\text{кр}}(\beta)$ с уровнем значимости β считают, что опытные данные согласуются с выбранным распределением $F(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$, в противном случае - не согласуются.

1.3. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ

Будем в дальнейшем понимать под случайной величиной X, введенной в § 1.2, продолжительность жизни человека. Очевидно, что в этом случае случайная величина X не может принимать отрицательные значения, т.е. $X>0$.

Рассмотрим наибольшие значения X.

Трудно ожидать, что в обозримом будущем человек проживет 1000 лет. В то же время нельзя указать наибольшее значение продолжительности жизни человека. Если он проживет до возраста x, то почему не найдутся люди, которые умрут в возрасте x+1 сек. Поэтому в актуарных расчетах полагают максимальную продолжительность равной 120 лет. Но это не является принципиальным. Подбирая параметры, всегда можно вероятность того, что человек проживет больше 120 лет, сделать сколько угодно малой.

Интуитивно ясно, что X - непрерывная случайная величина. Ее плотность вероятностей обозначим, как и ранее, через $f(x)$. В актуарной математике график функции $f(x)$ называют кривой смертей. Плотность вероятностей должна удовлетворять следующим ограничениям:

1'. $f(x) \equiv 0$ при $x<0$,

2'. $\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx=1,$

3'. $f(x)>0, \ \forall \ x>0.$

В комментариях нуждается условие 3'. Если $f(x) \equiv 0$ на некотором интервале $]a,b[, a<b$, то это означает, что человек заведомо не умрет в возрасте $x \in]a,b[$. Но таких интервалов в жизни нет.

Так же, как и раньше, введем законы

$$F(x)=P(X \le x) \text{ и } \overline{F}(x)=P(X>x).$$

Уточним, что $F(x)\ \left[\overline{F}(x)\right]$ - представляют собой вероятности смерти до времени x [дожить до возраста x] случайно выбранного человека.

Связь между законами $f(x)$, $F(x)$ и $\overline{F}(x)$ определятся аналогично (1.7) с учетом 1'

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=-\frac{d\overline{F}(x)}{dx},$$

$$F(x)=\int\limits_{0}^{x} f(x)dx, \qquad (1.9)$$

$$\overline{F}(x)=\int\limits_{x}^{\infty} f(x)dx.$$

Если под X понимать «продолжительность жизни» изделия (или, выражаясь стандартизировано, наработку на отказ), то законы $f(x)$, $F(x)$ и $\overline{F}(x)$ будут означать соответственно плотность распределения отказов, распределение отказов и распределение безотказной работы.

В актуарной математике чаще всего используют распределение $\overline{F}(x)$. Его обозначают $S(x)$, т.е.

$$S(x) \equiv \overline{F}(x),$$

и называют функцией выживания.

Отметим ряд ее свойств:

$$S(x)=1,$$

$$S(-\infty)=0,$$

$S(x)$ - дифференцируема,

$S(x)$ - строго убывает при $x > 0$.

Справедливость последних двух утверждений следует из условия 3' и формул (1.9).

Наряду с интегральной функцией выживания $S(x)$ полезно знать условную плотность вероятностей продолжительности жизни людей, которые достигли возраста x. Перейдем к ее нахождению.

Пусть события A и B означают соответственно, что человек проживет больше времени x и человек умрет во временном интервале $]x, x+\Delta x[$. Эти события имеют вероятности

$$P(A)=1-F(x),$$

$$P(B)=\int\limits_{x}^{x+\Delta x} F(x)dx = F(x+\Delta x)-F(x).$$

Вероятность смерти человека, дожившего до возраста x, в течение ближайшего времени $\Delta x > 0$, согласно (1.4), равна

$$P(x < X \le x+\Delta x | X > x) \equiv \frac{P(AB)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(x < X \le x+\Delta x)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{1-F(x)}.$$

Обозначим μ_x условную плотность смертей людей возраста x. Согласно определению

$$\mu_x := \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{P(x < X \le x+\Delta x | X > x)}{\Delta x} = \tag{1.10}$$

$$= \frac{1}{1-F(x)} \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{f(x)}{1-F(x)} = \frac{f(x)}{S(x)}.$$

Очевидно, что $\mu_x > 0$ при $x > 0$.

В актуарной математике функция μ_x играет важную роль и ее называют интенсивностью смертности. Аналогом этой характеристики в теории надежности является интенсивность отказов.

Функция μ_x представляет собой закон распределения продолжительности жизни. Установим ее связь с $F(x)$ и $S(x)$.

Понятно, что

$$\mu_x = \frac{F'(x)}{1-F(x)} = -\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{(1-F(x))'}{1-F(x)},$$

а значит,

$$d\,\ln(1-F(x)) = -\mu_x dx.$$

Тем самым получили дифференциальное уравнение относительно $F(x)$ при известной правой части $-\mu_x$. Решая его, получаем

$$\ln(1-F(x)) = -\int_0^x \mu_x dx + \ln C,$$

$$F(x) = 1 - C\exp\left\{-\int_0^x \mu_x dx\right\},$$

где C - константа интегрирования.

Поскольку $F(0)=0$, то $C=1$. Таким образом,

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \mu_x dx\right),$$

$$S(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu_x dx\right). \tag{1.11}$$

Так как $S(+\infty)=0$, то из последней формулы получаем

$$\int_0^{+\infty} \mu_x dx = +\infty.$$

В актуарных расчетах широко используют такие числовые характеристики, как среднее

$$\overset{0}{e}_0 := EX,$$

дисперсия

$$\sigma^2 = EX^2 - (EX)^2.$$

Определим их с помощью функции выживания. Проинтегрируем первую формулу в (1.8) по частям, полагая $dv = f(x)dx,\ v = -S(x)$. Тогда получаем

$$\overset{0}{e}_0 = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = -xS(x)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} S(x)dx.$$

Как отмечалось, функция выживания $S(x)$ быстро убывает с возрастанием x. Поэтому естественно считать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}S(x)=0$, при любом $\alpha\in R$.

Следовательно,

$$\overset{0}{e}_0 = \int_0^{+\infty} S(x)dx. \tag{1.12}$$

Аналогично устанавливаем, что

$$EX^2 = 2\int_0^{+\infty} xS(x)dx. \tag{1.13}$$

В основе актуарных расчетов лежит плотность вероятностей $f(x)$ и определяемые ей функции $S(x), \mu_x$ и другие характеристики. Ясно, что эти расчеты будут более простыми, если известен аналитический вид функции $f(x)$ с точностью ряда параметров, которые можно оценить по статистическим данным о продолжительности жизни людей.

В прошлом были предприняты многочисленные попытки получения универсального аналитического выражения для $f(x)$ по аналогии законам физики. С современных позиций эти усилия представляются наивными. Тем не менее были предложены некоторые аналитические формулы для $f(x)$, которые в той или иной степени могут быть использованы в актуарных расчетах. Приведем некоторые из них.

В 1729 г. Абрахам де Муавр предложил считать, что продолжительность жизни равномерно распределена на интервале $]0,\omega[$, где ω - предельный возраст человека, т.е.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega}, & 0<x<\omega\\ 0, & x\bar{\in}\,]0,\omega[.\end{cases}$$

Это наиболее простая аппроксимация истиной кривой жизни $f(x)$.

В рамках модели Муавра легко находятся функции выживания $S(x)$, распределение $F(x)$, интенсивность смертности μ_x и требуемые числовые характеристики: среднее, дисперсия и др.

Очевидно, что

$$F(x)=\frac{x}{\omega} \quad \text{при} \quad 0<x<\omega,$$

$$S(x)=1-\frac{x}{\omega} \quad \text{при} \quad 0<x<\omega.$$

Согласно (1.10)

$$\mu_x=\frac{1}{\omega-x} \quad \text{при} \quad 0<x<\omega.$$

По формулам (1.12) и (1.13) получаем

$$\overset{0}{e}_0=\int_0^\omega S(x)dx=\frac{\omega}{2},$$

$$EX^2=2\int_0^\omega x\left(1-\frac{x}{\omega}\right)dx=\frac{\omega^2}{3},$$

$$\sigma^2=\frac{\omega^2}{12}, \quad \sigma=\frac{\omega}{2\sqrt{3}}.$$

На основании опытных и статистических данных о продолжительности жизни модель Муавра можно считать очень грубой. Реально ее можно использовать для аппроксимации функции выживаемости на каком интервале времени.

В 1825 г. Гомпертц предложил аппроксимировать интенсивность смертности μ_x функцией Be^{ax}, где $a>B>0$ - некоторые параметры, т.е.

$$\mu_x=Be^{ax}, x>0.$$

По формулам (1.11) определяем кривую смертности и функцию выживания:

$$\int_0^x \mu_x dx=\frac{B}{a}\left(e^{ax}-1\right),$$

$$F(x)=1-\exp\left\{-\frac{B}{a}(e^{ax}-1)\right\},$$

$$S(x)=\exp\left\{-\frac{B}{a}(e^{ax}-1)\right\}.$$

Дифференцированием $F(x)$ находим кривую смертей

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=B\exp\left\{ax-\frac{B}{a}(e^{ax}-1)\right\}.$$

Определим точку максимума этой функции. Так как

$$\frac{df(x)}{dx}=B(a-Be^{ax})\exp\left\{ax-\frac{B}{a}(e^{ax}-1)\right\}=0$$

лишь при

$$\bar{x}:=\frac{1}{a}\ln\frac{a}{B}$$

и функция $f(x)$ положительная, то $\bar{x}$ является точкой максимума.

Нахождение среднего и дисперсии в модели Гомпертца приводит к неберущимся интегралам, которые могут быть вычислены приближенно при заданных параметрах a и B. Поэтому выражения для $\overset{0}{e}_0$ и σ^2 опускаем.

В 1860 г. Мэйкхам обобщил модель Гомперца, положив

$$\mu_x=A+Be^{ax},\ \ x>0.$$

Назначение дополнительного слагаемого A поясним ниже. Нетрудно проверить, что в рамках модели Гомпертца выполняются соотношения

$$S(x)=\exp\left\{-Ax-\frac{B}{a}(e^{ax}-1)\right\},$$

$$F(x)=1-\exp\left\{-Ax-\frac{B}{a}(e^{ax}-1)\right\},$$

$$f(x)=\left[A+Be^{ax}\right]\exp\left\{-Ax-\frac{B}{a}(e^{ax}-1)\right\}.$$

Рассмотрим предельный случай $B=0$. Тогда получим экспоненциальный закон

$$f(x)=Ae^{-Ax}.$$

с интенсивностью смертности A, независящей от возраста x. Такое можно ожидать, когда смерть вызвана несчастными случаями. Для описания доли таких смертей введен параметр A.

Расчет среднего и дисперсии в моделях Майкхама приводит также к неберущимся интегралам.

В 1939 г. Вейбулл предложил аппроксимировать интенсивность смертности степенной функцией:

$$\mu_x = kx^b, \ k > 0, \ b > 0.$$

Согласно этой модели, как нетрудно проверить,

$$S(x) = \exp\left\{-\frac{k}{b+1}x^{b+1}\right\},$$

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{k}{b+1}x^{b+1}\right\},$$

$$f(x) = kx^b \exp\left\{-\frac{k}{b+1}x^{b+1}\right\},$$

Производная

$$\frac{df(x)}{dx} = \left(kbx^{b-1} - k^2x^{b^2}\right)\exp\left\{-\frac{k}{b+1}x^{b+1}\right\} = 0$$

при

$$\bar{x} = \left(\frac{b}{k}\right)^{\frac{b^2}{b-1}},$$

которая является точкой максимума графика смертей, если $b > 1$.

Найдем среднее и дисперсию. С этой целью рассмотрим интеграл

$$I_\beta(c,\alpha) := \int_0^{+\infty} x^\beta \exp(-cx^\alpha)dx, \ c > 0, \ \beta > 0, \ \alpha > 0.$$

Напомним, что вычисление таких интегралов можно свести к нахождению гамма-функции

$$\Gamma(\rho) := \int_0^{+\infty} x^{\rho-1}e^{-x}dx$$

с помощью новой переменной $y := cx^\alpha$.

Действительно,

$$x = \frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}}y^{\frac{1}{\alpha}}, dx = \frac{1}{\alpha c^{\frac{1}{\alpha}}}y^{\frac{1}{\alpha}-1}dy,$$

а

$$I_\beta(c,\alpha)=\frac{1}{\alpha c^{\frac{\beta+1}{\alpha}}}\int_0^{+\infty} y^{\frac{\beta+1}{\alpha}-1}e^{-y}dy=\frac{1}{\alpha c^{\frac{\beta+1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right).$$

Очевидно, что

$$\overset{0}{e}_0=I_0\left(\frac{k}{b+1},b+1\right)=\left(\frac{b+1}{k}\right)^{\frac{1}{b+1}}\Gamma\left(\frac{1}{b+1}\right),$$

$$EX^2=I_1\left(\frac{k}{b+1},b+1\right)=\left(\frac{b+1}{k}\right)^{\frac{2}{b+1}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{b+1}\right),$$

$$\sigma^2=\left(\frac{b+1}{k}\right)^{\frac{2}{b+1}}\left[\Gamma\left(\frac{2}{b+1}\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{b+1}\right)\right].$$

Отметим, что распределение Вейбулла широко используют в теории надежности для описания наработок на отказ изделий. Особенно часто полагают $b=0$, тогда оно становится экспоненциальным.

В качестве кривой смертей можно порекомендовать гамма-расперделение

$$f(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x},\alpha>-1,\beta=0$$

с

$$\overset{0}{e}_0=\frac{\alpha}{\beta},\ \sigma^2=\frac{1}{\beta^2}$$

и логарифмически нормальное распределение

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}bx}\exp\left\{-\frac{(\ln x-a)^2}{2b^2}\right\},\ b>0,x>0. \qquad (1.14)$$

Для лучшего понимания рассмотрим

П р и м е р . Доказать, что функция (1.14) является кривой смертей и найти соответствующие ей законы $F(x)$, $S(x)$ и μ_x, а также числовые характеристики $\overset{0}{e}_0$ и σ^2.

Р е ш е н и е. Чтобы функция (1.14) соответствовала кривой смертей, она должна обладать свойствами плотностей вероятностей 1' и 2'. Первое свойство очевидно. Поэтому убедимся в справедливости условия 2' нормировки на единицу:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}b}\int_0^{+\infty}\exp\left\{-\frac{\left(\ln x-a^2\right)}{2b^2}\right\}\frac{dx}{x}=1. \qquad (1.15)$$

Введем новую переменную

$$y:=\frac{\ln x-a}{b} \qquad (1.16)$$

и правую часть выражения (1.15) запишем так:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}dy. \qquad (1.17)$$

Напомним, что

$$\varphi(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$$

является плотностью вероятностей нормальной случайной величины ξ с $\mathrm{E}\xi=0, D\xi=1$. Ее распределение

$$\mathrm{P}(\xi<x)=\Phi(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left\{-\frac{\xi^2}{2}\right\}d\xi,$$

где $\Phi(x)$ - табулированная функция, причем $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

Поэтому интеграл (1.17) равен единице, а, значит, свойство 2' выполнено.

Найдем распределение

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}b}\int_0^{x}\exp\left\{-\frac{(\ln x-a)^2}{2b^2}\right\}\frac{dx}{x}.$$

С помощью переменной (1.16) оно приводится к виду

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\ln x-a}{b}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}dy=\Phi\left(\frac{\ln x-a}{b}\right).$$

Функция выживания

$$S(x)=1-F(x)=1-\Phi\left(\frac{\ln x-a}{b}\right)=\Phi\left(\frac{a-\ln x}{b}\right).$$

Согласно (1.10),

$$\mu_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} \frac{\exp\left\{-\frac{(\ln x - a)^2}{2b^2}\right\}}{x\Phi\left(\frac{a - \ln x}{b}\right)}.$$

Найдем теперь среднее и дисперсию. Очевидно, что

$$\overset{0}{e}_0 = \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} \int_0^{+\infty} x \exp\left\{-\frac{(\ln x - a)^2}{2b^2}\right\} \frac{dx}{x}.$$

С помощью переменной (1.16)

$$\overset{0}{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{by + a - \frac{y^2}{2}\right\} dy =$$

$$= \exp\left\{\frac{b^2}{2} + a\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(y-b)^2}{2}\right\} dy =$$

$$= \exp\left\{\frac{b^2}{2} + a\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2}\right\} d\xi = \exp\left\{\frac{b^2}{2} + a\right\}.$$

Аналогично находим

$$EX^2 = \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} \int_0^{+\infty} x^2 \exp\left\{-\frac{(\ln x - a)^2}{2b^2}\right\} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{(a + by)^2 - \frac{y^2}{2}\right\} dy =$$

$$= \exp\left\{2\left(a + b^2\right)\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(y - 2b)^2}{2}\right\} dy = \exp\left\{2\left(a + b^2\right)\right\}.$$

Теперь легко определить дисперсию

$$\sigma^2 = EX^2 - \overset{0}{e}_0{}^2 = \exp\left\{2a + b^2\right\}\left(\exp b^2 - 1\right).$$

Введем еще ряд важнейших вероятностных характеристик продолжительности жизни.

Страховые компании обслуживают людей разного возраста. Естественно, их функции выживания различны, что естественно необходимо учитывать при заключении договора. Это удобно сделать с помощью другой случайной величины.

Рассмотрим всех людей, достигших возраста x. В актуарной математике каждого такого человека называют индивидуумом и обозначают (x). При страховании более важно знать вероятностные характеристики не продолжительности жизни X, а остаточного времени жизни

$$T(x) := X - x.$$

Вероятностные характеристики $T(x)$ и X тесно связаны между собой, только для $T(x)$ они являются условными, поскольку заведомо $X > x$.

Найдем функцию распределения остаточного времени жизни. Используя понятие условной вероятности, как это делалось при выводе формулы (1.10) для μ_x, запишем без объяснений

$$P(T(x) \le t) = P(X - x \le t | X > x) = P(X \le x + t | X > x) =$$
$$= \frac{P(x < X \le x + t)}{P(X > x)} = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)}. \quad (1.18)$$

В актуарной математике обозначают

$${}_t q_x := P(T(x) \le t)$$

вероятность смерти человека возраста x в течение ближайшего времени t.

Символом ${}_t p_x$ обозначают дополнительную вероятность $P(T(x) > t)$, с которой индивидуум (x) проживет еще, по крайней мере, время t. В силу (1.18)

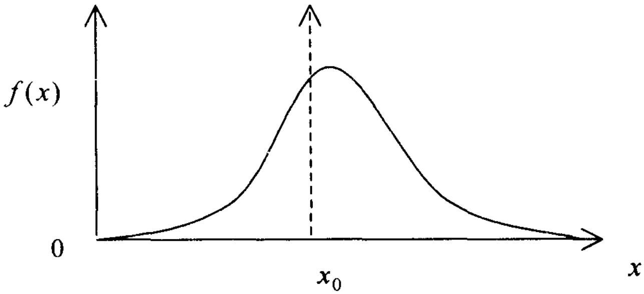
$${}_t p_x = P(T(x) > t) = 1 - P(T(x) \le t) = \frac{S(x+t)}{S(x)}. \quad (1.19)$$

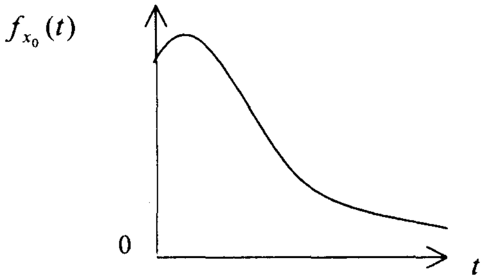
Дифференцированием (1.18) по t получаем плотность вероятностей остаточного времени жизни

$$f_x(t) = \frac{f(x+t)}{1 - F(x)} = \frac{f(x+t)}{S(x)}. \quad (1.20)$$

Из (1.20) ясно, что график функций $y = f_x(t)$ получается смещением влево кривой смертей и растяжением ее по оси y. Поясним это геометрически (рисунок).

Так как плотности вероятностей $f(x)$ и $f_x(t)$ нормированы на единицу, то $f(x+t)$, $t>0$, необходимо умножить на $\dfrac{1}{S(x)}>1$.





Для страховых компаний часто необходимо бывает знать вероятность, с которой индивидуум (x) проживет время t, но умрет до наступления возраста $t+u$, $u>0$. Другими словами, речь идет о вероятности события $\{t<T(x)\le t+u\}$.

Обозначим

$$ {}_{t|u}q_x := P(t<T(x)\le t+u). $$

Эту характеристику нетрудно выразить через ${}_yq_x$ или ${}_yp_x$. Действительно,

$$ {}_{t|u}q_x = P(T(x)\le t+u) - P(T(x)\le t) = {}_{t+u}q_x - {}_tq_x $$

или

$$ {}_{t|u}q_x = P(T(x)>t) - P(T(x)>t+u) = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x . $$

С помощью формулы (1.18) вероятность ${}_{t|u}q_x$ выразим через основную характеристику - функцию выживания $S(x)$:

$$ {}_{t|u}q_x = \frac{S(x+t) - S(x+t+u)}{S(x)}. $$

В практике страхования часто возраст x исчисляется годами, а в качестве t выбирается 1 год. В этом случае в характеристиках ${}_tq_x$ и ${}_tp_x$ индекс t опускается:

$$ q_x := P(T(x) \le 1) = \frac{S(x) - S(x+1)}{S(x)}, $$

$$ \rho_x := P(T(x) > 1) = \frac{S(x+1)}{S(x)}. $$

Это замечание относится к характеристике и ${}_{t|u}q_x$. При $u = 1$ соответствующий индекс принято опускать:

$$ {}_{t|1}q_x =: {}_{t|}q_x = {}_{t+1}q_x - {}_tq_x = {}_t\rho_x - {}_{t+1}\rho_x = $$

$$ = \frac{S(x+t) - S(x+t+1)}{S(x)}. $$

Уточним, что ${}_{t|}q_x$ - вероятность, с которой индивидуум (x) проживет t лет, но умрет на протяжении следующего года.

Введем интенсивность смертности $\mu_x(t)$ для $T(x)$. Ее естественно определить по аналогии μ_x. Тогда можно записать

$$ \mu_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T(x) \le t + \Delta t | T(x) > t)}{\Delta t} = $$

$$ = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P(t < T(x) \le t + \Delta t)}{P(T(x) > t)} = $$

$$ = \frac{1}{P(T(x) > t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(T(x) \le t + \Delta t) - P(T(x) \le t)}{\Delta t} = $$

$$ = \frac{1}{S(x+t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(x+t) - S(x+t+\Delta t)}{\Delta t} = $$

$$ -\frac{S'(x+t)}{S(x+t)} = -\frac{\partial}{\partial t} \ln S(x+t) = \frac{f(x+t)}{S(x+t)}. $$

Как и следовало ожидать, получили аналог (1.10). Поэтому справедливы формулы (см. (1.11))

$$ {}_t q_x = 1 - \exp\left\{ - \int_0^t \mu_x(t) dt \right\}, $$

$$ {}_t p_x = \exp\left\{ - \int_0^t \mu_x(t) dt \right\}. $$

Перейдем к числовым характеристикам $T(x)$.

Среднее значение остаточного времени жизни обозначают

$$ \overset{0}{e}_x := ET(x) $$

и называют полной вероятной продолжительностью жизни.

Так как случайная величина $T(x)$ неотрицательна, то, как и для EX (см. (1.12)), можно записать

$$ \overset{0}{e}_x = \int_0^{+\infty} P\big(T(x) > t\big) dt = \int_0^{+\infty} {}_t p_x dt. $$

Используя затем (1.19), получим

$$ \overset{0}{e}_x = \frac{1}{S(x)} \int_0^{+\infty} S\big(x+t\big) dt = \frac{1}{S(x)} \int_x^{+\infty} S(u) du. $$

Аналогично для второго момента (см. (1.13))

$$ ET^2(x) = 2 \int_0^{+\infty} t P\big(T(x) > t\big) dt = $$

$$ = 2 \int_0^{+\infty} {}_t p_x dt = \frac{2}{S(x)} \int_0^{+\infty} t S\big(x+t\big) dt. $$

Для лучшего понимания введенных характеристик остаточного времени жизни рассмотрим ряд конкретных законов смертности.

Модель Муавра. Ясно, что $x > 0$ не может быть больше ω. Поскольку

$$ f(x) = \frac{1}{\omega}, \ S(x) = 1 - \frac{x}{\omega}, \ 0 < x < \omega, $$

то при $0 < t < \omega - x$

$$ S\big(x+t\big) = 1 - \frac{x+t}{\omega}, $$

$$f_x(t)=\frac{f(x+t)}{S(x)}=\frac{\frac{1}{\omega}}{1-\frac{x}{\omega}}=(\omega-x)^{-1}=\frac{1}{\omega-x},$$

$$_t p_x=\frac{S(x+t)}{S(x)}=\frac{1-\frac{x+t}{\omega}}{1-\frac{x}{\omega}}=\frac{\omega-x-t}{\omega-x},$$

$$_t q_x=1-{}_t p_x=1-\frac{\omega-x-t}{\omega-x}=\frac{t}{\omega-x},$$

$$\overset{0}{e}_x=\frac{1}{S(x)}\int\limits_0^{\omega-x}S(x+t)dt=\frac{1}{1-\frac{x}{\omega}}\int\limits_0^{\omega-x}\left(1-\frac{x+t}{\omega}\right)dt=\frac{\omega-x}{2},$$

$$ET^2(x)=\int\limits_0^{\omega-x}t^2 f_x(t)dt=\frac{1}{\omega-x}\int\limits_0^{\omega-x}t^2dt=\frac{(\omega-x)^2}{3},$$

$$\sigma^2=ET^2(x)-\overset{0}{e}_x{}^2=\frac{(\omega-x)^2}{3}-\frac{(\omega-x)^2}{4}=\frac{(\omega-x)^2}{12},$$

$$\sigma=\frac{\omega-x}{2\sqrt{3}}.$$

Модель Мэйкхама. Несложно проверить, что

$$f(x)=\left(A+Be^{ax}\right)\exp\left\{-Ax-\frac{B}{a}\left(e^{ax}-1\right)\right\},$$

$$S(x)=\exp\left\{-Ax-\frac{B}{a}\left(e^{ax}-1\right)\right\}.$$

(При $A=0$ получаем модель Гомперца, поэтому ее отдельно не рассматриваем). Запишем без объяснений ряд характеристик:

$$_t p_x=\frac{S(x+t)}{S(x)}=\frac{\exp\left\{-A(x+t)-\frac{B}{a}\left[\exp a(x+t)-1\right]\right\}}{\exp\left\{-Ax-\frac{B}{a}\left(\exp ax-1\right)\right\}}=$$

$$= \exp\left\{-At - \frac{B}{a}\left(e^{a(x+t)} - 1\right) + \frac{B}{a}\left(e^{ax} - 1\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{-At - \frac{B}{a}e^{ax}\left(e^{at} - 1\right)\right\},$$

$${}_tq_x = 1 - {}_t\rho_x = 1 - \exp\left\{-At - \frac{B}{a}e^{ax}\left(e^{at} - 1\right)\right\},$$

$$f_x(t) = \frac{d}{dt}{}_tq_x = \left[A + Be^{a(x+t)}\right]\exp\left\{-At - \frac{B}{a}e^{ax}\left(e^{at} - 1\right)\right\},$$

$$\mu_x(t) = \frac{f(x+t)}{S(x+t)} = A + Be^{a(x+t)}.$$

Модель Вейбулла. Очевидно, что

$$f(x) = kx^b \exp\left\{-\frac{k}{b+1}x^{b+1}\right\},$$

$$S(x) = \exp\left\{-\frac{k}{b+1}x^{b+1}\right\},$$

а значит,

$${}_t\rho_x = \frac{\exp\left\{-\frac{k}{b+1}(x+t)^{b+1}\right\}}{\exp\left\{-\frac{k}{b+1}x^{b+1}\right\}} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{k}{b+1}\left[(x+t)^{b+1} - x^{b+1}\right]\right\},$$

$${}_tq_x = 1 - \exp\left\{-\frac{k}{b+1}\left[(x+t)^{b+1} - x^{b+1}\right]\right\},$$

$$f_x(t) = k(x+t)^b \exp\left\{-\frac{k}{b+1}\left[(x+t)^{b+1} - x^{b+1}\right]\right\},$$

$$\mu_x(t) = k(x+t)^b.$$

В моделях Мэйкхама и Гомпертца не указаны числовые характеристики, так как их нахождение приводит к не берущимся интегралам.

Часто страхование жизни осуществляют на конечный период n. При этом страховка выплачивается либо в момент смерти индивидуума, если она наступила до окончания периода n, либо по истечении времени n. Другими словами, момент выплаты наступает при $\min\{T(x),n\}$. Такое страхование называют смешанным. Для страховой компании время $\min\{T(x),n\}$ представляет собой момент «смерти» индивидуума. Поэтому случайную величину $\min\{T(x),n\}$ называют частичной продолжительностью жизни, а среднее значение $\overset{0}{e}_{x,\overline{n}|} := E\min\{T(x),n\}$ - частичной средней продолжительностью жизни.

Для вычисления $\overset{0}{e}_{x,\overline{n}|}$ необходимо определить распределение $P(\min\{T(x),n\}>t)$. Очевидно, что оно сосредоточено на промежутке $[0,n[$ и равно нулю при $t>n$. Для случая $t<n$ событие $\min\{T(x),n\}>t$ эквивалентно тому, что $T(x)>t$. Поэтому

$$P(\min\{T(x),n\}>t)=\begin{cases} {}_t p_x, & 0\le t<n, \\ 0, & t\ge n. \end{cases}$$

Согласно формуле (1.19) получаем

$$\overset{0}{e}_{x,\overline{n}|} = \int_0^{+\infty} P(\min\{T(x),n\}>t)dt =$$

$$= \int_0^n {}_t p_x dt = \frac{1}{S(x)}\int_0^n S(x+t)dt = \frac{1}{S(x)}\int_x^{x+n} S(u)du.$$

1.4. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ

Введенные в § 1.3 вероятностные характеристики продолжительности жизни, как правило, априори не известны (за редкими исключениями). Поэтому их необходимо определить с требуемой точностью и достоверностью. Исходной информацией для их оценки или выбора являются статистические данные о продолжительности жизни, которые могут иметь разнообразный характер.

В данном параграфе приводены соответствующие статистические оценки ряда вероятностных характеристик продолжительности жизни.

Пусть были проведены наблюдения за группой из l_0 новорожденных и зафиксированы их моменты смерти $x_1, x_2, \ldots, x_{l_0}$. (В последующем предполагаем, что случайные величины $x_1, x_2, \ldots, x_{l_0}$ независимые между собой. Тем самым накладывается ограничение на подбор группы).

Обладая такими данными можно оценивать основные характеристики продолжительности жизни двумя способами.

1.Вначале, опишем первый из них. Поскольку функция выживания $S(x)$ (или $F(x)$) является основной, через которую выражаются основные характеристики, то естественно попытаться определить ее с приемлемой точностью по данным $x_1, x_2, \ldots, x_{l_0}$.

Возможны два варианта.

А. Есть достаточные основания считать, что вероятность $P(X < x)$ описывается полностью определенной функцией $F_T(x)$. Индекс «Т» означает, что $F_T(x)$ распределение теоретическое. Оно может совпадать или нет с реальным законом $F(x)$. При этом задача сводится к проверке по результатам наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_{l_0}$ гипотезы о том, что

$$F(x) \equiv F_T(x). \tag{1.21}$$

При конечном объеме выборки l_0 установить точно справедливость (1.21) нельзя. Однако с приемлемой для практики точностью это можно осуществить с помощью критерия Колмогорова, который кратко был описан в § 1.2.

Напомним, что для этого необходимо определить эмпирическое распределение

$$\hat{F}(x) = \frac{d(x)}{l_0}, \tag{1.22}$$

где $d(x)$ - число $x_i, i = \overline{1, l_0}$, меньших или равных x.

После этого найти отклонение

$$D = \max_{-\infty < x < +\infty} \left| \hat{F}(x) - F_T(x) \right|.$$

По величине D судят о том, с каким уровнем значимости β выполняется гипотеза (1.21). Если значение β приемлемо для последующих расчетов, то полагают $F(x) \equiv F_T(x)$. Остальные вероятностные характеристики продолжительности жизни определяют по формулам, приведенным в § 1.2.

Понятно, что вариант А является привлекательным, поскольку все необходимые расчеты можно реализовать аналитическими методами. Однако он не всегда реализуем.

Б. Имеются достаточные доводы предполагать, что закон $F(x) = P(X \le x)$ описывается распределением $F_T(x,\theta)$, вид которого известен с точностью ряда параметров $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$. Например, есть основания считать, что описание продолжительности жизни можно проводить в рамках модели Гомперца. Тогда, как было показано в § 1.3,

$$F_T(x,\theta) = 1 - \exp\left\{-\frac{B}{a}\left(e^{ax} - 1\right)\right\},$$

где $\theta = (a, B)$, $a > B > 0$ - неизвестные параметры.

В варианте Б задача сводится к ответу на вопрос: можно (и как) или нет подобрать такие параметры θ, чтобы с приемлемой точностью $F(x) \cong F_T(x,\theta)$?

Для ответа на этот вопрос можно воспользоваться критерием хи-квадрат. Его сущность кратко была описана в § 1.2.

Вначале в соответствии с методами моментов, максимального правдоподобия (описанными в § 1.2) или другими методами по результатам наблюдений $x_1, x_2, \dots, x_{l_0}$ получают оценки $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k)$ неизвестных параметров θ.

Затем числовую ось разбивают на l частей точками $y_1 < y_2 < \dots < y_{l-1}$ (выбор числа l и концов отрезков $y_i, i = \overline{1, l-1}$ здесь не обсуждается) и подсчитывают число m_j наблюдений x_i, $i = \overline{1, l_0}$, принадлежащих промежутку $]y_{j-1}, y_i]$, $j = \overline{1, l-1}$, $y_0 = -\infty$, $y_l = +\infty$. Кроме того, вычисляют вероятности

$$\hat{p}_j := F_T(y_j, \hat{\theta}) - F_T(y_{j-1}, \hat{\theta}), j = \overline{1, l}, y_l = +\infty$$

и

$$\chi^2 = \sum_{j-1}^{l} \frac{\left(m_j - l_0\rho_j\right)^2}{l_0\rho_j}.$$

Зная величину χ^2, степень свободы $l_0 - k - 1$ и объем выборки l_0, по известным статистическим таблицам определяют уровень значимости. Если он приемлем для последующих расчетов, то полагают

$$F(x) \equiv F_T\left(x, \hat{\theta}\right).$$

Остальные вероятностные характеристики продолжительности жизни находят аналитическими методами по формулам раздела 1.3.

2. Второй путь не предполагает нахождение аналитических законов продолжительности жизни, а использовать их статистические аналогии. Он дает вполне приемлемые для практики результаты, поскольку, как правило, объемы l_0 наблюдений достаточно большие.

В качестве оценки распределения $F(x)$ полагают эмпирическое распределение $\hat{F}(x)$ (см. (1.22)). Согласно теореме Гливенко, оно дает хорошие приближения для $F(x)$ при больших значениях l_0. Тогда оценка функции выживаемости будет

$$\hat{S}(x) = 1 - \hat{F}(x). \qquad (1.23)$$

Эту оценку можно записать иначе. Обозначим $L(x)$ число живых представителей наблюдаемой группы в возрасте x. Очевидно, что

$$L(x) := \sum_{i=1}^{l_0} I\left(x_i > x\right),$$

где $I(A)$ - индикатор события A;

$$I(A) = \begin{cases} 1 - \text{событие А наступило,} \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

С помощью функции $L(x)$ оценку (1.23) можно представить в виде

$$\hat{S}(x) = 1 - \hat{F}(x) = \frac{1}{l_0} L(x). \qquad (1.24)$$

Введем функцию

$$l_x := EL(x)$$

и установим ее связь между l_x и $S(x)$. Очевидно, что

$$l_x = EL(x) = \sum_{i=1}^{l_0} E(I(x_i > x)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{l_0} P(x_i > x) = \sum_{i=1}^{l_0} S(x) = l_0 S(x). \qquad (1.25)$$

Таким образом, функция выживания $S(x)$ представляет собой среднюю долю живых индивидуумов (x) некоторой фиксированной группы новорожденных.

В актуарной математике часто используют вместо $S(x)$ функцию l_x, фиксировав начальный размер группы l_0.

Зададим аппроксимацию кривой смертей с помощью функции l_x.

По результатам наблюдений $x_i, i = \overline{1, l_0}$ подсчитаем число D_x, умерших в возрасте от x до $x + t$ лет. Очевидно,

$${}_tD_x = L(x) - L(x+t) = \sum_{i=1}^{l_0} I(x < x_i \le x + t). \qquad (1.26)$$

Характеристика ${}_tD_x$ представляет собой случайную величину. Найдем ее среднее

$${}_td_x := E_tD_x.$$

Учитывая (1.25), запишем

$${}_td_x := E(L(x) - L(x+t)) = EL(x) - EL(x+t) =$$
$$= l_x - l_{x+t} = l_0(S(x) - S(x+t)). \qquad (1.27)$$

При $t = 1$

$${}_1d_x =: d_x = l_x - l_{x+1} = l_0(S(x) - S(x+1)). \qquad (1.28)$$

В силу формулы Лагранжа

$$S(x+1) - S(x) = S'(\xi),$$

где ξ - некоторое значение из $]x, x+1[$.

Естественно предположить, что в течение года производная $S'(x)$ мало меняется. Заменим в последней формуле $S'(\xi)$ на $S'(x)$. При этом соотношение (1.28) можно представить в виде

$$d_x \cong -l_0 S'(x) = l_0 f(x),$$

$$f(x) \cong \frac{dx}{l_0} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_0}. \tag{1.29}$$

Выразим остальные вероятностные характеристики продолжительности жизни (см. § 1.3) через функцию l_x. Заменяя в них $S(x)$ на $f(x)$ согласно (1.25) и (1.29), запишем

$$\mu_x = \frac{f(x)}{S(x)} \cong \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x},$$

$$_t p_x = \frac{S(x+t)}{S(x)} \cong \frac{l_{x+t}}{l_x},$$

$$_t q_x = 1 - {_t p_x} \cong \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x},$$

$$f_x(t) = \frac{f(x+t)}{S(x)} \cong \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x},$$

$$_{t|u} q_x = {_{t+u} q_x} - {_t q_x} \cong \frac{l_{x+t} - l_{x+t+u}}{l_x},$$

$$\mu_x(t) = \frac{f(x+t)}{S(x+t)} \cong \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_{x+t}},$$

$$\overset{0}{e}_x = \frac{1}{S(x)} \int_x^{+\infty} S(u)\,du \cong \frac{1}{l_x} \int_x^{+\infty} l_u\,du,$$

$$ET^2(x) = \frac{2}{S(x)} \int_0^{+\infty} tS(x+t)\,dt \cong \frac{2}{l_x} \int_0^{+\infty} t l_{x+t}\,dt,$$

$$\overset{0}{e}_{x,\overline{n}|} = \frac{1}{S(x)} \int_0^{n} S(x+t)\,dt \cong \frac{1}{l_x} \int_0^{n} l_{x+t}\,dt.$$

1.5. ТАБЛИЦЫ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ

Функцию дожития, а точнее связанную с ней величину $l_x = l_0 s(x)$, выражающую среднее число живых представителей некоторой группы из $l_0 = 100000$ новорожденных к возрасту x лет, в актуарной математике, традиционно задают в виде таблицы, которую называют таблицей продолжительности жизни. В качестве шага таблицы обычно рассматривают один год, то есть табулируют значения функции $l_x(x)$ для $x = 0,1,2,...$ лет.

Для удобства пользования в таблицы продолжительности жизни обычно включают ряд дополнительных величин: $d_x = l_x - l_{x+1}$ - число представителей группы, умерших в возрасте от x до $x+1$ лет, $q_x = d_x / l_x$ - доля представителей группы, доживших до возраста x лет, которые умрут в течении ближайшего года и др. (приложение 1).

Простейшими являются таблицы, содержащие информацию о статистических свойствах времени жизни случайно выбранного индивида, относительно которого известен только его возраст. Однако анализ применяемых страховыми компаниями методик сбора статистической информации показывает, что при заключении договора страховщик руководствуется вполне определенными правилами и тем самым производит целенаправленный отбор страхователей. Например, страхователями определенной страховой компании (или ее филиала) являются жители конкретного государства. При этом известно, что средние продолжительности жизни в разных странах существенно различны.

В пределах одной страны продолжительность жизни разных социальных демографических групп населения различна. Во всем мире женщины живут в среднем дольше, чем мужчины.

Страховая компания работает с конкретными людьми, относительно которых доступна определенная социально-демографическая информация (пол, возраст, профессия, семейное положение и т.д.), на основании которой их можно разделить на группы с различной ожидаемой продолжительностью жизни. Кроме того, компания имеет возможность организовать сбор дополнительной информации для проведения более качественного отбора, например, организовать медицинское обследование страхователей перед заключением договора. Это позволяет строить таблицы продолжительности жизни дифференцированно для каждой обследованной группы населения.

Таблицы продолжительности жизни, построенные для отобранных (по определенным признакам) групп населения, называют селективными таблицами, или таблицами отбора риска. Их использование позволяет делать более точные выводы при актуарных расчетах. Поэтому ясно, что каждой страховой компании необходимо иметь определенный набор таблиц продолжительности жизни для различных групп населения.

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ

Наряду с теорией вероятностей и математической статистикой в вопросах страхования жизни фундаментальную роль играет теория сложных процентов. Ее основное назначение состоит в разработке математических методов расчета накопления капитала и обосновании размеров выплаты по договорам.

В силу многообразия возможных форм страхования жизни и прироста дохода потребовалось создание теории процентов. Краткому введению в эту теорию посвящена настоящая глава.

2.1. ПРОСТЫЕ ПРОЦЕНТЫ

В финансовых операциях суммы денег обязательно привязаны к конкретным моментам или периодами времени. Более того, фактор времени, особенно в долгосрочных операциях, играет не меньшую, а иногда большую роль, чем размеры денежных сумм. Так, например, 1000 р., которые могут быть получены через пять лет, неравноценны этой же сумме, поступившей сегодня. Поэтому при изложении методов расчетов всегда указывают время их действия.

Под процентными деньгами или, кратко, процентами понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой форме. Процентной ставкой называют отношение величины дохода к сумме долга за единицу времени. Процентная ставка измеряется в процентах и в виде десятичной или натуральной дроби. Интервал времени, к которому приурочена процентная ставка, называют периодом начисления. Используют также и другую терминологию.

В зависимости от условий договора могут использоваться различные способы начисления процентов. Соответственно применяют разные виды процентных ставок, которые можно классифицировать по различным признакам.

Будем различать по базе их начисления, в зависимости от того, является она постоянной или переменной. При постоянной базе используют простые, при переменной - сложные процентные ставки.

Получим формулу для наращивания капитала по простой процентной ставке.

Пусть на счет помещена сумма денег F_0, по которому ежегодно начисляется одна и та же процентная ставка. Обозначим ее через i и будем считать, что измеряется в виде десятичной дроби. Найдем, так называемую, наращенную сумму F_n за n лет.

Очевидно, что каждый год приносит проценты в сумме iF_0. Начисленные за весь срок проценты составят

$$I := iF_0 n,$$

а наращенная сумма будет равна

$$F_n = F_0 + I = F_0(1 + ni). \qquad (2.1)$$

Выражение (2.1) называют формулой наращения по простым процентам или кратко - формулой простых процентов, а множитель $(1 + ni)$ - множителем наращения простых процентов.

С помощью формулы (2.1) легко решить обратную задачу об определении размера начального вклада S, чтобы спустя n лет получить сумму p при начислении ежегодной процентной ставки i. Используя соотношение (2.1), легко находим

$$S = \frac{p}{1 + ni}. \qquad (2.2)$$

2.2. НАКОПЛЕНИЕ КАПИТАЛА ПО ФАКТИЧЕСКИМ ПРОЦЕНТНЫМ СТАВКАМ

Как уже отмечалось, процентную ставку устанавливают в сочетании с основной единицей времени, например год, квартал и др. Наряду с этим указывают период конверсии (капитализации). Другими словами, интервал времени, в конце которого процентный доход приходуется, и полученный суммарный капитал рассматривается как вновь помещенный или выплачивается. Процентную ставку называют фактической, если период конверсии совпадает с основной единицей времени.

Выведем формулу наращивания капитала по фактическим процентным ставкам.

Пусть i - фактическая годовая процентная ставка, одинаковая для всех лет и измеряемая в виде десятичной дроби. Так же, как и раньше, обозначим F_0 начальный капитал, помещенный на счет. К концу 1-го года этот капитал возрастет на $F_0 \cdot i$ и станет равным

$$F_1 = F_0 + F_0 \cdot i = F_0(1+i).$$

К концу 2-го года капитал F_1 возрастет на $F_1 \cdot i$ и станет равным

$$F_2 = F_0(1+i) + F_1 \cdot i = F_0(1+i) + F_0(1+i) = F_0(1+i)^2 \text{ и т.д.}$$

Нетрудно видеть, что

$$F_n = F_0(1+i)^n \qquad (2.3)$$

является формулой прироста капитала по фактическим процентным ставкам.

Степени числа $1+i$ называют коэффициентами накопления, или накопительными множителями. Они определяют, согласно (2.3), накопительную стоимость начального капитала за n лет.

С помощью (2.3) легко ответить на вопрос о том, какую сумму F_0 надо положить на счет, чтобы спустя n лет получить сумму F_n. Из (2.3)

$$F_0 = \frac{1}{(1+i)^n} F_n = v^n F_n,$$

где $v := \dfrac{1}{1+i}$.

Коэффициент v, называемый дисконтирующим множителем, или коэффициентом дисконтирования, характеризует текущую стоимость $v^n c$ начального капитала c за n лет.

Рассмотрим более общий случай, когда в конце k - ого года на счет поступают дополнительные суммы r_n, $k = \overline{1,n}$.

Пусть, как и раньше, F_k - баланс в конце k -ого года, включающий платеж $r_k, k = \overline{1,n}$. Тогда процентный доход баланса от предыдущего года будет равен F_{k-1}, а суммарный капитал

$$F_k = F_{k-1} + i \cdot F_{k-1} + r_k = F_{k-1}(1+i) + r_k, \; k=\overline{1,n}. \qquad (2.4)$$

Тем самым получили рекуррентную формулу для нахождения F_k при заданных начальных условиях F_0 и $r_0 = 0$. При помощи этой формулы можно найти выражение для F_n методом математической индукции. Однако это можно сделать более простым способом.

Запишем k -е соотношение (2.4) в виде

$$F_k - (1+i)F_{k-1} = r_k . \qquad (2.5)$$

Умножим обе части равенства (2.5) на $(1+i)^{n-k}$. Тогда вместо (2.4) получим

$$(1+i)^{n-k} F_k - (1+i)^{n-k+1} F_{k-1} = r_k (1+i)^{n-k}, \ k=\overline{1,n}. \qquad (2.6)$$

Запишем систему уравнений (2.6) в виде

$$\begin{aligned}
&(1+i)^{n-1} F_1 - (1+i)^n F_0 = (1+i)^{n-1} r_1, \\
&(1+i)^{n-2} F_2 - (1+i)^{n-1} F_1 = (1+i)^{n-2} r_2, \\
&(1+i)^{n-3} F_3 - (1+i)^{n-2} F_2 = (1+i)^{n-3} r_3, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&F_n - (1+i)F_{n-1} = r_n .
\end{aligned}$$

После сложения уравнений этой системы в правой части, очевидно, все члены сократятся за исключением двух F_n и $-(1+i)^n F_0$ и получим

$$F_n = (1+i)^n F_0 + \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{n-k} r_k . \qquad (2.7)$$

Как и следовало ожидать, при $r_k = 0$, $k=\overline{1,n}$ формула (2.7) совпадает с (2.3). Уравнение (2.7) отражает очевидный результат: капитал в конце каждого года складывается из накопленной стоимости начального капитала и суммы накопленной стоимости промежуточных вкладов.

Из (2.4) следует, что приращение ΔF_k накоплений за k - ый год равно

$$\Delta F_k = F_k - F_{k-1} = i \cdot F_{k-1} + r_k ,$$

а суммарное приращение дохода

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta F_k = F_n - F_0 = \sum_{k=1}^{n} i \cdot F_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} r_k \qquad (2.8)$$

складывается из полученного суммарного процентного дохода и суммы всех промежуточных вкладов.

Поделив выражение (2.7) на $(1+i)^n$ и полагая $v = \dfrac{1}{1+i}$, найдем

$$v^n F_n = F_0 + \sum_{k=1}^{n} v^k r_k \tag{2.9}$$

или

$$F_0 = v^n F_n - \sum_{k=1}^{n} v^k r_k . \tag{2.10}$$

Согласно (2.10), для получения суммы F_n спустя n лет, вкладывая ежегодно на счет суммы r_k, $k=\overline{1,n}$, необходим начальный капитал F_0.

2.3. НАКОПЛЕНИЕ КАПИТАЛА ПО НОМИНАЛЬНЫМ ПРОЦЕНТНЫМ СТАВКАМ

Процентную ставку называют номинальной, если период конверсии не совпадает с основной единицей времени. Годовая процентная ставка 8% (0,08) с трехмесячным периодом конверсии означает, что процентный доход 8 / 4=2% (0,02), выплачивается в конце каждого квартала. Несложно понять, что при этом начальный капитал C возрастает за год до $C(1.02)^4 = C \cdot 1{,}0816$. Таким образом, годовая процентная ставка 8%, конвертируемого ежеквартального, эквивалентна годовой фактической процентной ставке 8,16%.

Обозначим $i^{(m)}$ номинальную процентную ставку с выплатой в год m раз (m - целое число). Из приведенного выше примера видно, что $i^{(m)}$ соответствует эквивалентная годовая фактическая ставка i, удовлетворяющая уравнению

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m ,$$

или (2.11)

$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1.$$

Уточним, что соотношение (2.11) означает равенство накопительных множителей.

Используя выражение (2.11), несложно решить обратную задачу. По заданной годовой фактической процентной ставке i найти эквивалентную номинальную процентную ставку $i^{(m)}$. Ясно, что

$$i^{(m)} = m[(1+i)^{1/m} - 1]\,. \tag{2.12}$$

При ежедневной конверсии число $m = 365$ является достаточно большим. Поэтому представляет интерес рассмотрение предельного случая, когда $m \to \infty$. Характеристику

$$\delta := \lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \lim_{m\to\infty} m[(1+i)^{1/m} - 1] \tag{2.13}$$

называют силой или нормой процентного дохода, эквивалентной ставке i.

Для нахождения предела δ преобразуем выражение (2.13) к виду

$$\delta = \lim_{m\to 0} \frac{(1+i)^{1/m} - 1}{1/m}.$$

Обозначая затем $1/m =: x$, запишем

$$\delta = \lim_{x\to 0} \frac{(1+i)^x - 1}{x}$$

и, применяя правило Лопиталя, найдем

$$\delta = \ln(1+i)\,. \tag{2.14}$$

В силу соотношения (2.14) накопительный множитель для периода n лет равен $(1+i)^n = e^{\delta n}$; дисконтирующий множитель для того же периода есть $v^n = e^{-cn}$.

Характер убывания функции $i^{(m)}$, по m иллюстрируется для $i = 0{,}06$ следующей таблицей:

m	1	2	3	4	6	∞
$i^{(m)}$	0,0600	0,5913	0.05884	0.05870	0,05855	0.05827

2.4. НАКОПЛЕНИЕ КАПИТАЛА ПРИ НЕПРЕРЫВНЫХ ПЛАТЕЖАХ

Рассмотрим теперь случай, когда платежи поступают на счет непрерывно во времени с годовой мгновенной интенсивностью $r(t)$. Тогда за бесконечно малый промежуток времени $]t, t+\Delta t]$ на счет поступит сумма $\approx r(t)\Delta t$. Кроме того, будем считать, что процентный доход выплачивается также непрерывно с нормой $\delta(t)$. Обозначим $F(t)$ баланс на счету в момент времени t. Тогда за промежуток времени $]t, t+\Delta t]$ процентный доход составит $\approx F(t)\delta(t)dt$. Суммарное приращение капитала $dF(t)$ за этот промежуток времени будет равно

$$dF(t) = \delta(t)F(t)dt + r(t)dt.$$

Итак, установлено, что для нахождения функции $F(t)$ необходимо решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$F'(t) - \delta(t)F(t) = r(t) \tag{2.15}$$

при начальном условии

$$F(0) = F_0. \tag{2.16}$$

Напомним, как это делается.

Решение $F(t)$ будем искать в виде произведения $u \cdot v$ двух функций, одно из которых $u(t)$ удовлетворяет соответствующему однородному дифференциальному уравнению $u' - \delta u = 0$ или иначе

$$\frac{d \ln u}{dt} = \delta .$$

Отсюда получаем

$$u(t) = \exp\left\{ \int_0^t \delta(t)dt \right\}.$$

Заменяя в (2.15) функции F на $u \cdot v$, получаем к дифференциальному уравнению

$$v' = r(t)\exp\left\{ -\int_0^t \delta(t)dt \right\}.$$

Следовательно,

$$v(t) = \int_0^t r(t)\exp\left\{ -\int_0^t \delta(t)dt \right\} + C.$$

Здесь C - константа интегрирования.

Согласно начальному условию (2.16), получаем

$$F_0 = F(0) = u(0)v(0) = C.$$

Таким образом,

$$F(t) = F_0 \exp\left\{ -\int_0^t \delta(t)dt \right\} +$$

$$+\exp\left\{-\int_0^t \delta(t)dt\right\}\int_0^t r(t)\exp\left\{\int_0^t \delta(t)dt\right\}dt. \qquad (2.17)$$

Из соотношение (2.17) следует, что стоимость начальной суммы F_0, подлежащей выплате в момент времени t (т.е. ее текущая стоимость получается умножением ее на коэффициент)

$$\exp\left\{-\int_0^t \delta(t)dt\right\}. \qquad (2.18)$$

(см. первый член правой части (2.17)). Накопленная стоимость получается умножением ее на коэффициент

$$\exp\left\{\int_0^t \delta(t)dt\right\}. \qquad (2.19)$$

При постоянной норме процентного дохода $(\delta(t) = \delta)$ коэффициенты (2.18) и (2.19) совпадают с коэффициентами дисконирования и накопления соответственно.

2.5 РАСЧЕТ АВАНСОВОГО ПРОЦЕНТНОГО ДОХОДА

В рассмотренных ранее моделях процентный доход приходуется в конце каждого периода конверсии (т.е. является задолженным). Будем теперь исходить из того, что процентный доход приходуется авансом в начале каждого периода конверсии. Выплачиваемый таким образом процентный доход называют дисконтом, а соответствующую ставку - ставкой дисконта или учетной ставкой.

Обозначим d годовую фактическую ставку дисконта. Предположим, что лицо инвестирует сумму C. Тогда ему сразу же выплачивается процентный доход dC, а остальная сумма C будет возвращена в конце года. Если же он пожелает инвестировать сумму dC, то получит аванс $d(dC) = d^2C$, а исходная сумма dC будет возвращена в конце второго года и т.д. За n лет инвестор получит общую сумму

$$C + dC + \ldots + d^nC = \frac{1-d^{n+1}}{1-d}C,$$

а при $n \to \infty$

$$C + dC + \ldots + d^nC + \ldots = \frac{1}{1-d}C.$$

Отсюда следует, что эквивалентная фактическая годовая процентная ставка i связана с годовой фактической ставкой дисконта d соотношением

$$\frac{1}{1+d}=1+i \tag{2.20}$$

или

$$d=\frac{i}{1+i}. \tag{2.21}$$

Как и следовало ожидать, процентный доход dC, выплачиваемый в начале года, равен дисконтированной стоимости процентного дохода C_i, выплачиваемого в конце года. В силу соотношения (2.20) имеем

$$i=\frac{d}{1-d}. \tag{2.22}$$

Другими словами, процентный доход, выплачиваемый в конце года, равен накопительной стоимости процентного дохода, выплачиваемого в начале года.

Рассмотрим теперь случай, когда выплата производится m раз в год. Пусть, как и раньше, $d^{(m)}$ - номинальная ставка авансового процентного дохода, выплачиваемого m раз в год. Тогда инвестор получает доход $\frac{d^{(m)}}{m}C$ в начале периода конверсии, а первоначальный вложенный капитал C возвращается в конце этого периода. Заменяя в в выражении (2.20) d и i на $\frac{d^{(m)}}{m}$ и $\frac{i^{(m)}}{m}$ соответственно, запишем

$$\frac{1}{1-\frac{d^{(m)}}{m}}=1+\frac{i^{(m)}}{m}=(1+i)^{1/m}. \tag{2.23}$$

Уточним, что последнее равенство справедливо в силу (2.11). Согласно выражению (2.23) находим

$$d^{(m)}=m\left(1-(1+i)^{-1/m}\right) \tag{2.24}$$

В соответствии с указанной выше заменой соотношение (2.21) приводим к виду

$$d^{(m)} = \frac{i^{(m)}}{1 + i^{(m)}/m} \tag{2.24}$$

или

$$\frac{1}{d^{(m)}} = \frac{1 + \dfrac{i^{(m)}}{m}}{i^{(m)}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{i^{(m)}}.$$

При $m \to \infty$ из последней формулы следует, что

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{d^{(m)}} = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{i^{(m)}}.$$

Поэтому

$$\lim_{m \to \infty} d^{(m)} = \lim_{m \to \infty} i^{(m)} = \delta. \tag{2.25}$$

Этот результат является очевидным, поскольку при непрерывном поступлении дохода различие между авансовым и процентным доходами исчезает.

Рассмотрим значения функции $d^{(m)}$ для $i = 6\%$.

m	1	2	3	4	6	6
$d^{(m)}$	0.05660	0.05743	0.05771	0,05785	0,05799	0.05827

Отметим, что предельные значения $i^{(m)}$ и $d^{(m)}$ совпадают между собой.

2.6. РАСЧЕТ ТЕКУЩИХ СТОИМОСТЕЙ РЕНТ

Рассмотрим вначале бессрочные платежные потоки или бессрочные ренты, состоящие из ежегодных выплат, величиной 1. Подсчитаем их текущие стоимости в зависимости от момента времени первой выплаты.

Если первая выплата осуществляется в начальный момент 0, то такую ренту называют прямой бессрочной рентой (или бессрочной рентой пренумерандо).

Принято обозначать $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$ ее текущую стоимость. Очевидно, что

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + \ldots = \frac{1}{1 - v}. \tag{2.26}$$

Если первую выплату производят в конце первого года, то такую называют непосредственно бессрочной рентой (или бессрочной рентой постнумерандо). Ее текущую стоимость обозначают через $a_{\overline{\infty}|}$, и она равна

$$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + \ldots + = \frac{v}{1-v} = i. \qquad (2.27)$$

Аналогично определяют ренты, когда сумма $1/m$ выплачивается m раз в году.

Обозначим $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}$ текущую стоимость ренты, платежи которой осуществляются авансом; первая выплата суммы $1/m$ производится в начальный момент времени 0.

Для подсчета $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}$ воспользуемся формулой (2.26), заменяя в ней выплачиваемый капитал 1 на $1/m$ и v на $v^{1/m}$. Тогда получим

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}v^{1/m} + \frac{1}{m}v^{2/m} + \ldots + = \frac{1}{m}\frac{1}{1-v^{1/m}}. \qquad (2.28)$$

С помощью приведенных формул легко подсчитать текущие стоимости рент с ограниченным сроком действия. Их называют аннуитетами, или правильными рентами.

Обозначим через $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ текущую стоимость прямого аннуитета с n ежегодными выплатами по 1. Очевидно, что

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1}.$$

Представим этот аннуитет в виде разности двух бессрочных рент (одной - начинающей в момент 0, а другой - в момент n). Тогда получим

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|} - v^n \ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d} - v^n\frac{1}{d} = \frac{1-v^n}{d}.$$

Аналогично находим текущую стоимость $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$ аннуитета с выплатой m раз в год. Используя формулу (2.28), легко получить, что

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1-v^n}{d^{(m)}}.$$

ГЛАВА 3. МОДЕЛИ СТРАХОВАНИЯ ЖИЗНИ

Модели страхования жизни делятся на две большие группы: краткосрочные и долгосрочные. К первой группе относятся модели, в которых не учитывается изменение ценности денег во времени, обусловленное инфляцией и другими факторами. Обычно в качестве временного интервала выбирают 1 год. Если же расчеты осуществляются с учетом возможной инфляции, то модели страхования называют долгосрочными.

3.1. КРАТКОСРОЧНОЕ СТРАХОВАНИЕ

Человек покупает за p рублей страховой полис на следующих условиях. Если он умрет в течении года, то его наследникам будет выплачена сумма b. Естественно, что значение b должно быть существенно больше p. Если же человек проживет год, то вся сумма денег p остается в страховой компании. Нахождение "правильного" соотношения между p и b является одной из задач актуарной математики.

Обозначим ξ индивидуальный иск человека, который он может предъявить страховой компании. Очевидно, ξ - случайная величина. Ее распределение имеет вид

$$\pi_i := P(\xi = i) = \begin{cases} p_x, & \text{если} \quad i = 0, \\ q_x, & \text{если} \quad i = b. \end{cases}$$

Здесь x - возраст застрахованного, p_x - вероятность того, что человек проживет еще год, а $q_x = 1 - p_x$ - вероятность того, что человек умрет в течении ближайшего года.

Математическое ожидание иска

$$E\xi = 0 \cdot \pi_0 + b \cdot \pi_b = b \cdot q_x,$$

а дисперсия

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 0^2 \pi_0 + b^2 \pi_b - (bq_x)^2 = \\ b^2 q_x - b^2 q_x^2 = b^2 p_x q_x.$$

Найдем средний "доход" страховой компании D. Очевидно, она получит доход p с вероятностью p_x и потерпит убытки в размере $b-p$ с вероятностью q_x. Суммарный "доход" равен

$$D = p - E\xi = p - bq_x. \tag{3.1}$$

Используя формулу (3.1), можно найти наибольшее значение b, называемое нетто-премией, которое должна выдать страховая компания:

$$b = \frac{p}{q_x},$$

чтобы ее средний доход D был неотрицателен. В действительности, страховая компания должна учитывать другие свои расходы, связанные с содержанием административного аппарата, с гарантией не разорения и др.

3.2. ДОЛГОСРОЧНОЕ СТРАХОВАНИЕ

Будем исходить из того, что изменение ценности денег за счет коммерческой деятельности страховых компаний за n лет осуществляется в соответствии с законом

$$A(1+t)^n.$$

Здесь t - постоянное число, характеризующее годовой прирост капитала, A - постоянное число.

По таблице продолжительности жизни определим ряд чисел

$$N_a, N_{a+1}, \dots, N_{a+i}, \dots,$$

где N_{a+i+1} - число лиц, которые из N_a доживают до возраста $a+i+1$ лет. Тогда отношение

$$\frac{N_{a+i+1}}{N_{a+i}}$$

будет представлять собой оценку вероятности того, что лицо в возрасте $a+i$ лет проживет еще один год, а дробь

$$\frac{N_{a+i} - N_{a+i+1}}{N_{a+i}}$$

- оценку вероятности его смерти в ближайшем году.

Аналогичный смысл имеет отношение

$$\frac{N_{a+i+n}}{N_{a+i}}.$$

Эта оценка вероятности того, что лицо в возрасте $a+i$ лет проживет еще n лет. Дроби

$$\frac{N_{a+i}-N_{a+i+1}}{N_{a+i}}, \quad \frac{N_{a+i+1}-N_{a+i+2}}{N_{a+i}},\ldots$$

соответствуют оценке вероятности того, что лицо в возрасте $a+i$ лет, умрет в возрасте от $a+i$ до $a+i+1$ лет соответственно, от $a+i+1$ до $a+i+2$ лет и т.д.

Введем новые числа

$$Q_a := \frac{N_a}{(1+t)^{\omega}}, \qquad Q_{a+1} := \frac{N_{a+1}}{(1+t)^{\omega+1}},\ldots, \qquad Q_{a+i} := \frac{N_{a+i}}{(1+t)^{\omega+i}},\ldots,$$

где ω - некоторое постоянное число, например a.

Кроме того, из Q_{a+i}, $i=0,1\ldots$ составим еще один ряд

$$\begin{array}{llll} S_a := & Q_{a+1}+ & Q_{a+2}+ & Q_{a+3}+\ldots \\ S_{a+1} := & & Q_{a+2}+ & Q_{a+3}+\ldots \\ S_{a+2} := & & & Q_{a+3}+\ldots \\ \ldots & \ldots & & \end{array}$$

С помощью введенных чисел решим ряд задач, возникающих при долгосрочном страховании жизни.

ЗАДАЧА 1. Определить стоимость единицы капитала, которую должны уплатить лицу в возрасте c лет, чтобы его (капитал равный 1) получить в возрасте d лет.

Покажем, что эта стоимость равна

$$\frac{N_d}{N_c}\frac{1}{(1+t)^{d-c}} \tag{3.2}$$

или по другому Q_d/Q_c.

Пусть N_c - лица, достигшие возраста c лет и каждое из них внесет в общую кассу капитал /см. (3.2)/. Тогда страховая компания получит сумму денег

$$\frac{N_d}{(1+t)^{d-c}},$$

которая через $d-c$ лет превратится в N_d. Но, согласно таблице продолжительности жизни, доживут до возраста d лет N_d лиц. Каждому из них страховая компания может заплатить по единице капитала.

ЗАДАЧА 2. Лицо в возрасте c лет желает получать ежегодную постоянную пенсию A, начиная с момента достижения им возраста $c+i$ лет до смерти. Определить сумму X, которую он должен заплатить.

Для простоты рассуждений будем считать, что ежегодная пенсия выплачивается целиком, т.е по достижении возраста $c+i$ лет, $c+i+1$ лет, $c+i+2$ лет,...

Согласно решению задачи 1 он должен заплатить вначале за каждый год

$$\frac{Q_{c+i}}{Q_c}A, \qquad \frac{Q_{c+i+1}}{Q_c}A, \qquad \frac{Q_{c+i+2}}{Q_c},\ldots,$$

что в сумме составляет

$$\frac{Q_{c+i}+Q_{c+i+1}+\ldots}{Q_c}A=\frac{S_{c+i-1}}{Q_c}A.$$

Отсюда заключаем, что

$$X=\frac{S_{c+i-1}}{Q_c}A.$$

ЗАДАЧА 3. Определить сумму Y, которую должна потребовать страховая компания за выплату наследникам лица, достигшего возраста c, суммы A после смерти этого лица.

Для простоты рассмотрения будем предполагать, что смерть застрахованного лица наступает по достижении возраста c лет, $c+1$ лет, $c+2$ лет и т.д. Если смерть наступает между возрастами $c+i$ лет и $c+i+1$ лет, то можно выплачивать наследникам из расчета, что смерть наступила $c+i$ лет (или $c+i+1$ лет). В первом случае увеличивается (во втором случае - уменьшается) стоимость выплаты.

Для более точных расчетов возраст человека следует считать с точностью полугода, квартала, месяца и т.д.

В силу постановки задачи (с учетом сделанных оговорок) можно рассматривать пожизненное страхование человека как совокупность последовательных годовых страхований:

- на случай смерти в возрасте от c до $c+1$ лет;
- на случай смерти в возрасте от $c+1$ до $c+2$ лет;

и т.д.

Стоимости этих годовых страхований равняются соответственно

$$\frac{N_c - N_{c+1}}{N_c}A, \qquad \frac{N_{c+1} - N_{c+2}}{N_c}\frac{A}{1+t}, \ldots$$

Суммарная стоимость составляет

$$\frac{N_c - N_{c+1}}{N_c}A + \frac{N_{c+1} - N_{c+2}}{N_c}\frac{A}{1+t} + \frac{N_{c+2} - N_{c+3}}{N_c}\frac{A}{(1+t)^2} + \ldots =$$

$$= A - \frac{AN_{c+1}}{N_c}(1 - \frac{1}{1+t}) - \frac{AN_{c+2}}{N_c(1+t)}(1 - \frac{1}{1+t}) + \ldots =$$

$$= A - \frac{AN_{c+1}}{N_c}\frac{t}{1+t} - \frac{AN_{c+2}}{N_c}\frac{t}{(1+t)^2} + \ldots =$$

$$= A - tA\frac{Q_{c+1} + Q_{c+2} + \ldots}{Q_c} = A(1 - t\frac{S_c}{Q_c}).$$

Таким образом, получаем

$$Y = (1 - t\frac{S_c}{Q_c})A.$$

ЗАДАЧА 4. Человек возраста c лет выплачивает страховой компании ежегодно сумму x, начиная с достижения возраста d лет до своей смерти, с тем условием, что его наследникам будет выдана сумма A после его смерти. Определить минимальную значение отношения x/A.

При решении задачи 2 было показано, что лицо заплатит страховой компании сумму, в пересчете на начало страхования, равную

$$(1 + \frac{S_c}{Q_c})x. \tag{3.3}$$

Согласно решению задачи 3, на начало страхования стоимость суммы A, которая должна быть выплачена наследникам, составила

$$A(1 - t\frac{S_c}{Q_c}). \tag{3.4}$$

Приравнивая (3.3) и (3.4), получаем

$$(1 + \frac{S_c}{Q_c})x = A(1 - t\frac{S_c}{Q_c}).$$

Откуда находим отношение

$$\frac{x}{A}=\frac{1-t\dfrac{S_c}{Q_c}}{1+\dfrac{S_c}{Q_c}}=\frac{Q_c-tS_c}{Q_c+S_c}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Фалин Г.И., Фалин А.И. Введение в актуарную математику. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. - 85 с.

Гербер Х. Математика страхования жизни: Пер. с нем. М.: Мир, 1995. - 156 с.

Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. - М.: ДЕЛО ЛТД., 1995. - 320 с.

Фалин Г.И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1996. 221 с.

Баскаков В.Н., Карташов Г.Д. Методические указания к решению задач по актуарной математике. (Модели дожития). М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 42 с.

Приложение 1

Таблица продолжительности жизни населения (СССР 1984-1985 годы)

Возраст (x)	Число лиц, доживших до определенного возраста из 100000 родившихся (l_x)		Число лиц, умерших в возрасте от x до $x+1$ лет из 100000 родившихся (d_x)		Доля лиц, доживших до возраста x лет, которые умрут в течении года (q_x)	
	Мужчины	Женщины	Мужчины	Женщины	Мужчины	Женщины
1	2	3	4	5	6	7
1	97099	97743	642	591	0.00666	0.00605
2	96457	97152	222	198	0.00231	0.00204
3	96235	96954	127	104	0.00132	0.00107
4	96108	96850	93	76	0.00097	0.00078
5	96015	96774	76	59	0.00079	0.00061
6	95939	96715	70	49	0.00073	0.00051
7	95869	96666	69	44	0.00072	0.00046
8	95800	96622	67	41	0.00070	0.00042
9	95733	96581	65	38	0.00068	0.00039
10	95668	96543	61	36	0.00064	0.00037
11	95607	96507	57	34	0.00060	0.00035
12	95550	96473	55	33	0.00058	0.00034
13	95495	96440	57	33	0.00060	0.00034
14	95438	96407	65	36	0.00068	0.00037
15	95373	96371	78	40	0.00082	0.00041
16	95295	96331	97	45	0.00101	0.00047
1	2	3	4	5	6	7
17	95198	96286	118	51	0.00124	0.00053
18	95080	96235	142	57	0.00149	0.00059
19	94938	96178	164	62	0.00173	0.00065
20	94774	96116	186	66	0.00196	0.00069
21	94588	96050	205	69	0.00216	0.00072
22	94383	95981	221	71	0.00234	0.00074
23	94162	95910	235	73	0.00249	0.00076
24	93927	95837	247	75	0.00263	0.00078
25	93680	95762	260	77	0.00277	0.00081
26	93420	95685	274	80	0.00293	0.00084
27	93146	95605	290	84	0.00312	0.00088
28	92856	95521	310	89	0.00333	0.00093
29	92546	95432	330	95	0.00356	0.00099
30	92216	95337	352	101	0.00381	0.00106
31	91864	95236	372	108	0.00405	0.00113
32	91492	95128	389	116	0.00425	0.00121
33	91103	95012	406	125	0.00445	0.00131
34	90697	94887	422	135	0.00465	0.00142
35	90275	94752	440	147	0.00487	0.00155
36	89835	94605	462	159	0.00514	0.00168
37	89373	94446	492	172	0.00550	0.00182
38	88881	94274	529	185	0.00595	0.00196
39	88352	94089	573	199	0.00649	0.00212

1	2	3	4	5	6	7
40	87779	93890	622	214	0.00708	0.00228
41	87157	93676	671	231	0.00770	0.00247
42	86486	93445	719	249	0.00831	0.00267
43	85767	93196	762	270	0.00888	0.00289
44	85005	92926	801	292	0.00943	0.00314
45	84204	92634	840	316	0.00997	0.00341
46	83364	92318	881	341	0.01057	0.00369
47	82483	91977	929	367	0.01126	0.00399
48	81554	91610	985	394	0.01208	0.00430
49	80569	91216	1050	424	0.01303	0.00465
50	79519	90792	1121	459	0.01409	0.00506
51	78398	90333	1193	500	0.01522	0.00554
52	77205	89833	1264	548	0.01637	0.00610
53	75941	89285	1332	601	0.01754	0.00673
54	74609	88684	1397	656	0.01872	0.00740
55	73212	88028	1462	709	0.01997	0.00806
56	71750	87319	1532	756	0.02136	0.00866
57	70218	86563	1610	795	0.02293	0.00919
58	68608	85768	1695	831	0.02470	0.00969
59	66913	84937	1783	869	0.02665	0.01023
60	65130	84068	1870	919	0.02871	0.01094
61	63260	83149	1949	992	0.03080	0.01193
62	61311	82157	2021	1083	0.03296	0.01318

1	2	3	4	5	6	7
63	59290	81074	2089	1189	0.03523	0.01467
64	57201	79885	2153	1305	0.03765	0.01634
65	55048	78580	2217	1430	0.04027	0.01819
66	52831	77150	2277	1561	0.04310	0.02024
67	50554	75589	2333	1700	0.04616	0.02249
68	48221	73889	2385	1845	0.04947	0.02497
69	45836	72044	2431	1997	0.05304	0.02771
70	43405	70047	2470	2153	0.05691	0.03073
71	40935	67894	2500	2212	0.06108	0.03406
72	38435	65582	2521	2474	0.06558	0.03772
73	35914	63108	2530	2635	0.07044	0.04176
74	33384	60473	2527	2794	0.07568	0.04620
75	30857	57679	2508	2945	0.08129	0.05106
76	28349	54734	2477	3088	0.08738	0.05642
77	25872	51646	2430	3218	0.09393	0.06232
78	23442	48428	2367	3331	0.10098	0.06879
79	21075	45097	2288	3423	0.10857	0.07589
80	18787	41674	2193	3487	0.11672	0.08368
81	16594	38187	2082	3521	0.12548	0.09221
82	14512	34666	1957	3520	0.13489	0.10155
83	12555	31146	1820	3481	0.14497	0.11176
84	10735	27665	1672	3400	0.15577	0.12291
85	9063	24265	1517	3277	.016733	0.13507

1	2	3	4	5	6	7
86	7546	20988	1509	4197	0.20000	0.20000
87	6037	16791	2414	6716	0.40000	0.40000
88	3623	10075	2174	6045	0.60000	0.60000
89	1449	4030	1159	3224	0.80000	0.80000
90	290	806	290	806	1.00000	1.00000

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редакция заказной литературы

Валерий Николаевич Баскаков
Геннадий Дмитриевич Карташов

Введение в актуарную математику

Заведующая редакцией Н.Г.Ковалевская
Редактор Г.А. Нилова
Корректор Л.И. Малютина

Подписано в печать 03.09.98. Формат 60х84/16. Бумага тип. №2.
Печ. л.4,0 Усл.печ.л. 3,72. Уч.-изд.л. 3,59.
Тираж 600 экз. Изд № 140 Заказ 2703

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
107005, Москва, 2-я Бауманская, 5.